5. CINEMATIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE -DETERMINATION D'UNE LOI ENTREE-SORTIE-

Elaboré par : Youssef RAHOU, novembre 2018

1. Introduction :

En continuité avec les deux chapitres précédents, et une fois qu'un mécanisme est modélisé à travers son schéma cinématique, paramétré à travers des repères associés aux solides qui le composent, il est dorénavant possible de mener une étude mécanique, qui peut concerner :

- La cinématique : discipline de la mécanique qui a pour objet **la description du mouvement des systèmes matériels indépendamment des causes qui les produisent.**

La notion de **temps** est introduite à celle de **l'espace**.

- La cinétique : discipline de la mécanique qui s'intéresse à **la description du mouvement des systèmes matériels en prenant en compte leur inertie.**

La notion de **masse** est introduite en parallèle à celles du **temps** et de **l'espace.**

- La statique : discipline de la mécanique qui a pour objet l'étude des **systèmes matériels au repos, donc à l'équilibre**. Les grandeurs **efforts et couples** sont étudiées, la notion de temps est absente (sous l'hypothèse du solide indéformable).
- La dynamique : discipline de la mécanique qui a pour objet l'étude **du mouvement des systèmes matériels et de leurs causes**.

Ce chapitre traite la partie introductive **de la cinématique**, qui a son tour se décompose **principalement** en :

- Loi d'entrée- sortie.
- Détermination des paramètres cinématiques (vitesse et accélération) par **dérivation directe.**
- Détermination des paramètres cinématiques (vitesse et accélération) par **une relation de champ de vitesse/accélération.**
- Détermination des paramètres cinématiques (vitesse et accélération) par **composition de mouvement.**

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la notion de **loi entrée-sortie**, de quoi s'agit-il ? Quelle méthodologie à adopter pour l'établir ? Ainsi que quelques cas d'études pertinents.

2. Loi entrée – sortie :

2.1. Définition :

On appelle **loi entrée-sortie** d'un mécanisme donné, la relation qui existe **entre les paramètres de position (et de leurs dérivées) de la pièce d'entrée** du mécanisme **et les paramètres de position (et de leurs dérivées) de la pièce de sortie** du même mécanisme.

Remarque :

Cette loi peut permettre de déterminer la position de la sortie du mécanisme en fonction de la position de l'entrée, dans ce cas, on utilise la loi dans **le sens direct**. Mais on peut être amené, à travers cette loi, à identifier l'entrée en fonction d'une sortie imposée, par le cahier des charges par exemple, dans ce cas la loi est utilisée dans **le sens indirect**.

2.2. Méthodologie pour établir une loi entrée - sortie :

La méthode à adopter pour établir une loi entrée-sortie d'un mécanisme dépend de sa configuration, principalement, il existe trois types de configurations :

- Mécanisme à chaine cinématique ouverte.
- Mécanisme à chaine cinématique fermée.
- Mécanisme à particularité géométrique.

Par la suite, chaque configuration sera traitée à travers un cas d'étude pertinent.

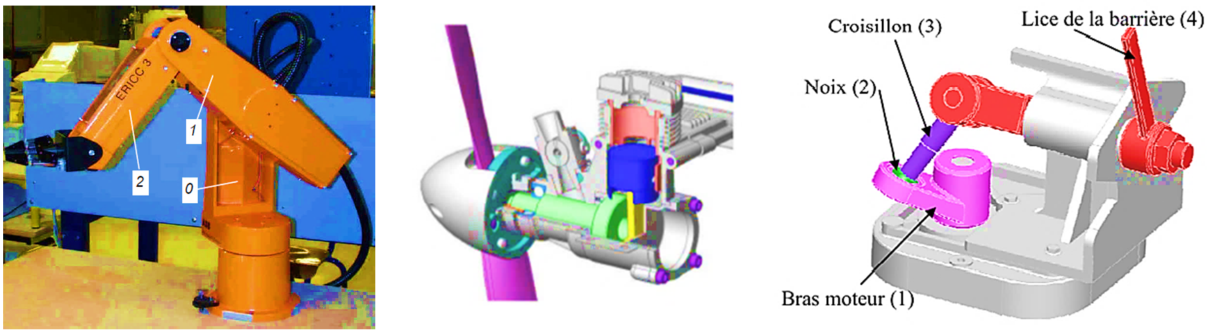


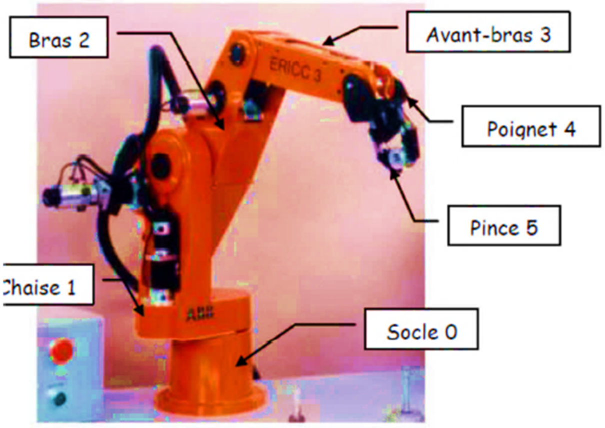
Figure.1. Cas d'études illustrant les trois configurations,

Robot Ericc 3, micromoteur à système bielle-manivelle et barrière Sinusmatic

3. Loi entrée - sortie, cas d'études :

3.1. Cas d'une chaine cinématique ouverte :

On s'intéresse au cas du robot Ericc 3 en adoptant son schéma cinématique simplifié,



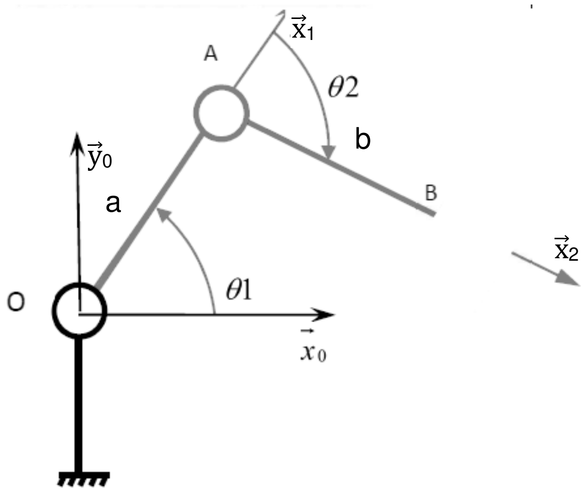


Figure.2. Robot Ericc 3, mécanisme réel et schéma cinématique simplifié adopté

3.1.1. Loi entrée-sortie d'un mécanisme à chaine ouverte :

Pour établir la loi entrée-sortie d'un tel mécanisme :

- Identifier les paramètres de position d'entrée et de sortie.
- En utilisant le théorème de Chasles, exprimer le vecteur positon d'un point pertinent de la sortie du mécanisme.
- En projetant cette la relation précédente dans une base judicieusement choisie, exprimer la relation liant les paramètres de position d'entrée et ceux de la sortie.

3.1.2. **Cas d'étude, robot Ericc 3 :**

A. Paramètres de position d'entrée et de sortie :

Pour repérer le point B qui représente la pince qui permettra de déplacer les pièces, on peut choisir les coordonnées cartésiennes (x_B, y_B, z_B), par nature de cette étude, l'évolution du point B se fait dans le plan (O, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$), ainsi il suffit de repérer le point B par ses deux cordonnées : x_B et y_B.

Ces deux coordonnées dépendent directement de la position des bras :

- Position du bras 1 par rapport au bâti : θ_1.
- Position du bras 2 par rapport au bâti : θ_2.

Ainsi ;

Les paramètres d'entrée sont θ_1 et θ_2, et les paramètres de sortie sont x_B et y_B.

La loi entrée-sortie est de la forme :

$$x_B = x_B(\theta_1,\theta_2),\ y_B = y_B(\theta_1,\theta_2)$$

B. Expression du vecteur position d'un point de la sortie :

Ce point est unique, c'est le point B, le vecteur $\overrightarrow{OB}$ s'écrit dans le repère (O, $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$) :

$$\overrightarrow{OB} = a.\vec{x}_1 + b.\vec{x}_2$$

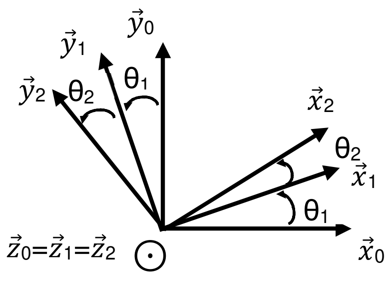
C. Loi d'entrée-sortie, sens direct :

Pour établir la loi entrée-sortie, il faut exprimer les paramètres de sortie :

$$x_B = \overrightarrow{OB}.\vec{x}_0 \text{ et } y_B = \overrightarrow{OB}.\vec{y}_0$$

Ainsi :

- $x_B = \overrightarrow{OB}.\vec{x}_0 = a.\vec{x}_1.\vec{x}_0 + b.\vec{x}_2.\vec{x}_0 = a.\cos\theta_1 + b.\cos(\theta_1+\theta_2)$.
- $y_B = \overrightarrow{OB}.\vec{y}_0 = a.\vec{x}_1.\vec{y}_0 + b.\vec{x}_2.\vec{y}_0 = a.\sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1+\theta_2)$.



La loi entrée sortie s'écrit :

$$x_B = a.\cos\theta_1 + b.\cos(\theta_1+\theta_2) \text{ et } y_B = a.\sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1+\theta_2).$$

3.2. Cas d'une chaine cinématique fermée :

On s'intéresse à un cas très classique, qui est celui du système bielle-manivelle,

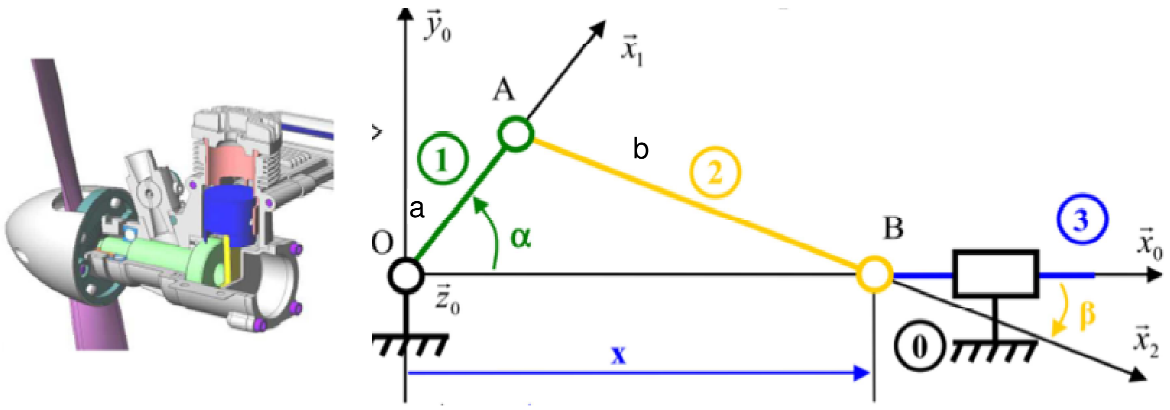


Figure.3. Micromoteur, mécanisme réel et schéma cinématique associé.

Remarque :

Selon l'utilisation de ce système, le paramètre d'entrée est :

- **x** : translation du piston, dans ce cas le paramètre de sortie est α, et le système est utilisé en tant que moteur.
- α : rotation du vilebrequin, dans ce cas le paramètre de sortie est x, et le système est utilisé en tant que compresseur.

3.2.1. Loi entrée-sortie d'un mécanisme à chaine fermée :

Pour établir la loi entrée-sortie d'un tel mécanisme :

- Identifier les paramètres de position d'entrée et de sortie.
- En utilisant le théorème de Chasles, exprimer **La fermeture géométrique** du mécanisme,
- En projetant cette la relation précédente dans une base judicieusement choisie, exprimer la relation liant les paramètres de position d'entrée et ceux de la sortie.

Remarque :

La fermeture géométrique comporte :

- Une fermeture géométrique linéaire : somme des vecteurs d'une chaine fermée est nulle.
- **Au besoin**, Une fermeture géométrique angulaire, en exprimant la somme des angles de la chaine fermée pour établir une relation angulaire.

3.2.2. Cas d'étude, micromoteur-micro compresseur :

A. Paramétrage et paramètres de position d'entrée et de sortie :

Considérons le mode de fonctionnement ''compresseur'', dans ce cas, la rotation du vilebrequin α représente le paramètre d'entrée, et x le paramètre de sortie du microcompresseur.

Le paramètre d'entrée est l'angle α et le paramètre de sortie est x.

La loi entrée-sortie s'écrit : $x= x(\alpha)$

Remarque :

- La loi entrée sortie donnera x en fonction de α et **des paramètres géométriques constants** (a, b), **mais pas de β, qui est un paramètre intermédiaire variable** qu'il faut éliminer.

B. Expression de la fermeture géométrique :

Au niveau du triangle OAB, la fermeture géométrique s'écrit :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$$

Ou encore :

$$a.\vec{x}_1+b.\vec{x}_2-x.\,\vec{x}_0=\vec{0}$$

C. Loi d'entrée-sortie, sens direct :

- Pour extraire x en fonction de α, projetons cette relation suivant l'axe $(0, \vec{x}_0)$:

$$a.\cos\alpha+ b.\cos\beta-x=0.$$

- Cette relation ne suffit pas pour avoir x en fonction de α uniquement, il faut établir une deuxième relation en projetant la fermeture vectrielle suivant l'axe $(0, \vec{y}_0)$:

$$a.\sin\alpha+ b.\sin\beta=0.$$

- **Pour éliminer l'angle β, il suffit d'exprimer que : $\sin^2\beta+ \cos^2\beta=1$**, les deux relations scalaires précédentes permettent d'écrire que :

$$b.\cos\beta = x- a.\cos\alpha \text{ et } b.\sin\beta = -a.\sin\alpha$$

Ainsi :

$$b^2= (x- a.\cos\alpha)^2+a^2.\sin^2\alpha$$

d'où : $x-a.\cos\alpha= \sqrt{b^2 - a^2.\sin^2\alpha}$

La loi entrée sortie s'écrit :

$$x = a.\cos\alpha +\sqrt{b^2 - a^2.\sin^2\alpha}$$

3.3. Cas d'un mécanisme à particularité géométrique :

On s'intéresse à un mécanisme appelé **barrière Sinusmatic** permet de transformer le mouvement **continu** d'entrée du moteur (α) en un mouvement de rotation **alternative permettant d'ouvrir et de fermer une barrière.**

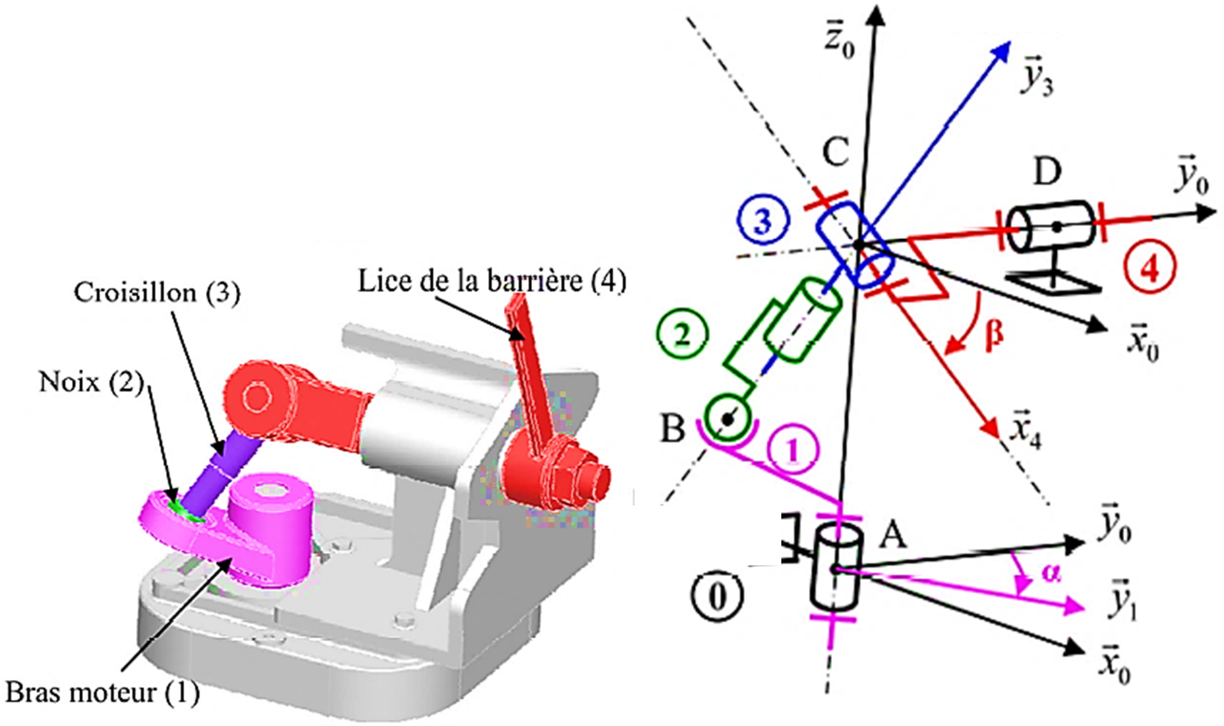


Figure.4. Barrière Sinusmatic, mécanisme réel et schéma cinématique associé.

3.3.1. Loi entrée-sortie d'un mécanisme à particularité géométrique :

3.3.2. Cas d'étude, barrière Sinusmatic :

Pour établir une loi entrée-sortie d'un tel mécanisme :

- Identifier les paramètres de position d'entrée et de sortie.
- Repérer une particularité géométrique au niveau du mécanisme (perpendicularité permanente **(relation de produit scalaire nul)** ou parallélisme **(relation de produit vectoriel nul).**
- En projetant cette la relation précédente dans une base judicieusement choisie, exprimer la relation liant les paramètres de position d'entrée et ceux de la sortie.

A. *Paramétrage et paramètres de position d'entrée et de sortie :*

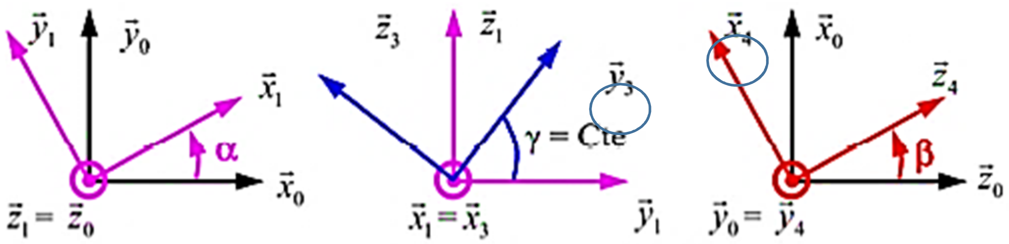


Figure.5. Figures planes correspondant au paramétrage du mécanisme de la barrière.

Le paramètre d'entrée est l'angle de rotation du moteur α et le paramètre de sortie est l'angle de rotation de la barrière β.

La loi entrée-sortie s'écrit : $\beta= \beta(\alpha)$

B. Expression de la relation de la particularité géométrique :

La forme géométrique de la pièce 3 contient **une perpendicularité permanente** qui se traduit par la relation :

$$\vec{x}_4.\vec{y}_3=0$$

C. Loi d'entrée-sortie, sens direct :

Pour pouvoir évaluer ce produit scalaire, il faut ramener l'expression des vecteurs $\vec{x}_4$ et $\vec{y}_3$ dans la même figure plane, ainsi :

$\vec{y}_3= \cos\gamma.\vec{y}_1+\sin\gamma.\vec{z}_1$ et $\vec{x}_4= \cos\beta.\vec{x}_0-\sin\beta.\vec{z}_0$

La relation de particularité géométrique s'écrit :

$\vec{x}_4.\vec{y}_3 =(\cos\beta.\vec{x}_0-\sin\beta.\vec{z}_0).(\cos\gamma.\vec{y}_1+\sin\gamma.\vec{z}_1)=0$

$\Rightarrow$ $\cos\beta.\cos\gamma.\vec{x}_0.\vec{y}_1+ \cos\beta.\sin\gamma.\vec{x}_0.\vec{z}_1 - \sin\beta.\cos\gamma.\vec{z}_0.\vec{y}_1-\sin\beta.\sin\gamma.\vec{z}_0.\vec{z}_1=0.$

avec : $\vec{x}_0.\vec{y}_1= -\sin\alpha$, $\vec{x}_0.\vec{z}_1=0$, $\vec{z}_0.\vec{y}_1=1$, $\vec{z}_0.\vec{z}_1=0$

d'où : $- \cos\beta.\cos\gamma.\sin\alpha- \sin\beta.\sin\gamma=0$

La loi entrée sortie s'écrit : $\tan\beta = - \sin\alpha / \tan\gamma$

Remarque :

- L'angle γ est considéré comme constant.